

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

освітньо-кваліфікаційний рівень: *магістр*

на тему «*Розв’язання нелінійних систем в
задачах керування*»

Виконав: студент групи МП62 VI курсу
(другий магістерський рівень),
спеціальності 113
“Прикладна математика”
освітньо-професійної програми
“Прикладна математика”
Возняк О.С.

Керівник: доктор фіз.-мат. наук,
завідувач кафедри
прикладної математики
Коробов В.І.

Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук,
доцент кафедри
прикладної математики
Сморцова Т.І.

Анотації

Возняк О.С. Розв'язання нелінійних систем в задачах керування.

У роботі розглядається задача нуль-керуваності з припущенням, що початок координат не є точкою рівноваги системи. Для цього використовується поняття умови повертання на інтервалі [8] та відповідний критерій, отриманий В. І. Коробовим. Ця умова означає, що для деякого інтервалу I для будь-якого $T \in I$ можна побудувати таке керування $u_T(t)$, що траєкторія, починаючи з початку координат, може повернутися туди за час T . Розглядається коливальна система $\dot{x}_{2k-1} = k x_{2k}$, $\dot{x}_{2k} = -k x_{2k-1} + u$, $k = 1, 2, \dots, n$, з обмеженнями $u \in [c, 1]$ або $u \in \{c, 1\}$, $c > 0$. Цю задачу можна записати як тригонометричну проблему моментів $\int_0^T u(t)e^{kit} dt = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, яка при кусково-постійному керуванні перетворюється на нелінійну систему рівнянь з невідомими точками перемикавання. У цій роботі запропоновано декілька розв'язків для коливальних систем з раціональними коефіцієнтами і зроблено певні узагальнення.

Vozniak O.S. Solving nonlinear systems in control problems.

In this work the null-controllability problem with the assumption that the origin is not an equilibrium point of the system is considered. Here we use the concept of return condition on an interval [8] and the corresponding criterion obtained by V. I. Korobov. This condition means that for some interval I for any $T \in I$ we can construct a control $u_T(t)$ such that the

trajectory starting from the origin can return there in the time T . We consider the oscillating system $\dot{x}_{2k-1} = k x_{2k}$, $\dot{x}_{2k} = -k x_{2k-1} + u$, $k = 1, 2, \dots, n$, with constraints $u \in [c, 1]$ or $u \in \{c, 1\}$, $c > 0$. This problem can be written as the trigonometric momentum problem $\int_0^T u(t) e^{kit} dt = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, which in the case of piecewise control transforms into a nonlinear system of equations with unknown switching points. In this work several solutions are proposed for the oscillating systems with rational coefficients and certain generalizations are made.

Зміст

Анотації	2
Вступ	5
1. Геометричний критерій нуль-керованості	7
1.1. Нуль-керованість лінійних автономних систем	7
1.2. Геометричний критерій нуль-керованості для точки, що не є точкою рівноваги	10
2. Побудова кусково-неперервного керування	15
2.1. Постановка задачі	15
2.2. Керування, що має $2n$ точок перемикання	18
2.3. Керування з 2 точками перемикання	22
2.4. Випадок ірраціональних коефіцієнтів	24
3. Приклад програми	30
Висновки	35
Список використаних джерел	36

Вступ

Математична теорія керування з'явилась та почала інтенсивно розвиватися в середині ХХ століття. Її виникнення пов'язане з необхідністю розв'язувати нові на той час задачі, насамперед задачі керування механічними об'єктами, рух яких описується диференціальними рівняннями. Принцип максимуму Понтрягіна став основою математичної теорії керованих процесів. Подальший розв'язок теорії керування пов'язаний з задачами стабілізації, програмного керування, та іншими.

Задача керованості для лінійних систем розглядається математиками з 60-х років минулого століття і з того часу отримано багато основних результатів. Однак деякі питання залишаються відкритими, або потребують додаткової роботи враховуючи їхній теоретичний інтерес і важливе прикладне значення. Однією із таких задач є керованість лінійної системи з обмеженим керуванням. Більш конкретно, розглядається лінійна керована система виду

$$\dot{x} = Ax + \phi(u), x \in \mathbb{R}^n, u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r. \quad (0.1)$$

де A — дійсна матриця, а $\phi(u)$ — дійсна неперервна вектор-функція.

Задача керованості таких систем розглядалася переважно для випадку керування в точку рівноваги [1], [5], [4], [3]. Зокрема в статті [3] В. І. Коробовим був доведений геометричний критерій нуль-керованості, умови якого можна легко перевірити з точки зору параметрів системи (0.1) (тобто матриці A та множини $\phi(\Omega)$). У той же час у загальній постановці задачі природно розглядати проблему керованості до кінцевої точки, яка не є рівноважною для системи (0.1). Для цього випадку також отримано цікаві

результати [4], [6], [8], наприклад в статті [6] було показано, що для керованості не в точку спокою необхідно і достатньо щоб приведена система була повністю керованою та існувало внутрішнє зворотнє керування. Інший критерій, разом із новим введеним поняттям умови повертання на інтервалі, було отримано В. І. Коробовим в статті [8], а також зроблено висновки щодо нуль-керованості певних класів систем. В нашій роботі за допомогою даного критерію досліджується керованість загальних коливальних систем, які мають велике прикладне значення і, зокрема, використовуються при описанні руху зв'язаних та незв'язаних маятників та моделюють коливання струни.

В першому розділі даної роботи розглядається загальна теорія нуль-керованості лінійних автономних систем для випадків коли початок координат є і не є точкою рівноваги, в другому розділі описуються основні результати роботи і в третьому наведено приклади програм і розрахунків.

Розділ 1

Геометричний критерій нуль-керованості

1.1. Нуль-керованість лінійних автономних систем

Розглянемо лінійну автономну керовану систему

$$\dot{x} = Ax + \phi(u(t)), x \in \mathbb{R}^n, u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r, \quad (1.1)$$

де Ω – множина допустимих керувань.

Означення 1.1. [3] Множиною S нуль-керованості системи (1.1) називається множина точок $x_0 \in \mathbb{R}^n$, з яких можна потрапити в точку 0 за скінченний час по траєкторії цієї системи при деякому керуванні $u \in \Omega$.

Означення 1.2. Система (1.1) називається локально нуль-керованою, якщо S містить 0 в якості внутрішньої точки і глобально нуль-керованою якщо $S = \mathbb{R}^n$.

В статті [3] отримано наступний критерій нуль-керованості для лінійних автономних систем, із додатковою умовою, що існує $u_0 \in \Omega$ таке, що $\phi(u_0) = 0$, тобто точка 0 є точкою спокою.

Теорема 1.3. [3] Для того щоб лінійна автономна система (1.1) була локально нуль-керованою, необхідно і достатньо, щоб при деякому $m \geq 0$ опукла оболонка $\text{co}L$, множини $L = \{\phi(\Omega), A\phi(\Omega), \dots, A^m\phi(\Omega)\}$, і опукла

оболонка $\text{co}L^-$ множини $L^- = \{\phi(\Omega), -A\phi(\Omega), \dots, (-1)^m A^m \phi(\Omega)\}$, мали нуль у якості внутрішньої точки.

За допомогою цього критерію покажемо, що система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad (1.2)$$

не є нуль-керованою при $0 \leq u \leq 1$.

Приклад 1.4.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad \Omega = \{u : 0 \leq u \leq 1\}, \quad (1.3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi(u) = Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \phi(0) = 0. \quad (1.4)$$

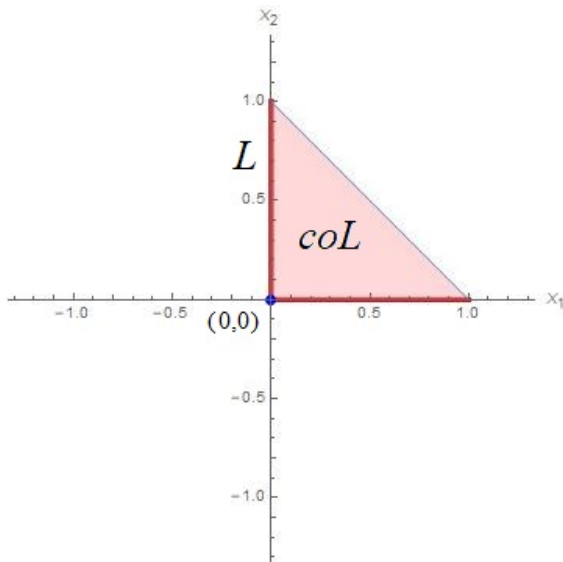
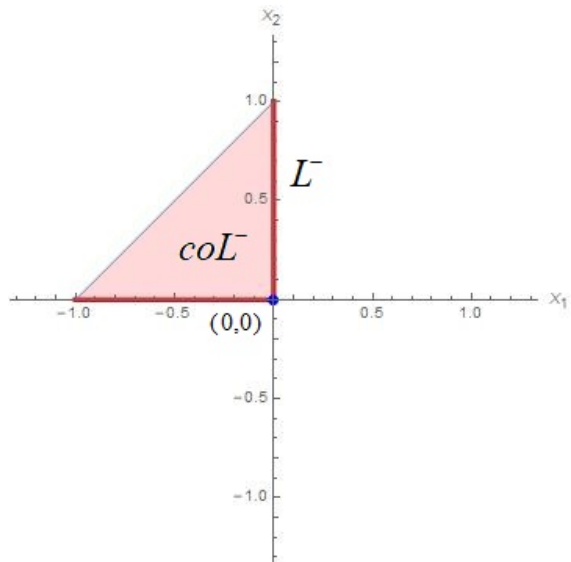
Знайдемо множини L і L^- :

$$Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}, \quad ABu = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^2Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}, \quad A^3Bu = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad (1.5)$$

$$L = (Bu, ABu) = \begin{pmatrix} 0 & u \\ u & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

$$L^- = (Bu, -ABu) = \begin{pmatrix} 0 & -u \\ u & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Зобразимо L (рис. 1.1) і L^- (рис. 1.2) графічно, і покажемо, що $0 \notin \text{int}(\text{co}L)$ і $0 \notin \text{int}(\text{co}L^-)$.

Рис. 1.1: Множина L Рис. 1.2: Множина L^-

Зауважимо, що при обмеженні на керування $-1 \leq u \leq 1$ дана система була б нуль-керованою. Покажемо тепер, що коливальна система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \quad (1.8)$$

буде нуль-керованою при $0 \leq u \leq 1$.

Приклад 1.5.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \quad \Omega = \{u : 0 \leq u \leq 1\}, \quad (1.9)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi(u) = Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \phi(0) = 0. \quad (1.10)$$

$$Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}, \quad ABu = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^2Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ -u \end{pmatrix}, \quad A^3Bu = \begin{pmatrix} -u \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Тоді при $m = 3$,

$$L = \{Bu, ABu, A^2Bu, A^3Bu\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -u \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (1.12)$$

$$L^- = \{Bu, -ABu, A^2Bu, -A^3Bu\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -u \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (1.13)$$

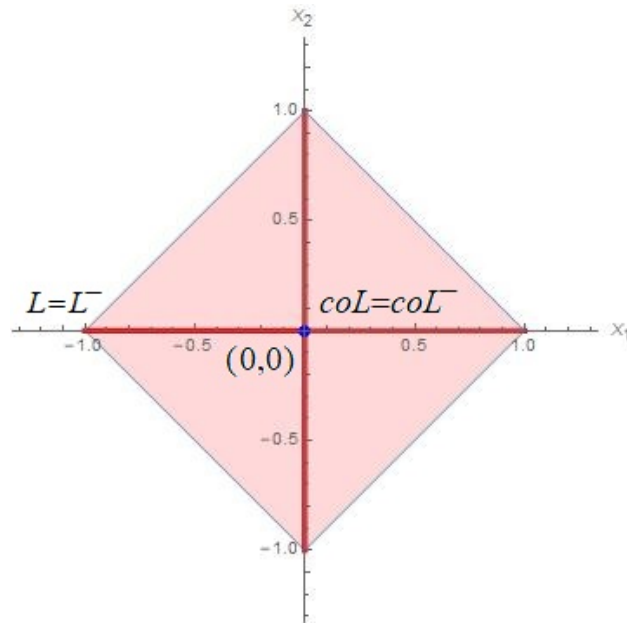


Рис. 1.3: Множини L та L^-

1.2. Геометричний критерій нуль-керovanості для точки, що не є точкою рівноваги

В попередній теоремі важливим було припущення про те, що точка нуль є точкою рівноваги системи, тобто існує $u_0 \in \Omega$ таке, що $\phi(u_0) = 0$. Проблему нуль-керovanості системи з обмеженнями на керування для випадку коли нуль не є точкою рівноваги розглянуто в статті [8]. Тоді під нуль-керovanістю ми маємо на увазі існування моменту часу T^* , такого що для кожного моменту часу $T > T^*$ можна обрати керування, що переводить

точку в початок координат за час T . Для цього було введено нове поняття умови повертання на інтервалі.

Розглянемо систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \phi(u), \\ x &\in \mathbb{R}^n, u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Означення 1.6. [8] Будемо говорити, що для системи (1.14) виконується умова повертання на інтервалі $I = [T^*, T^* + \alpha]$, ($\alpha > 0, T^* \geq 0$), якщо, для будь-якого $T \in I$, існує допустиме керування $u_T(t)$, таке, що розв'язок задачі Коші $\dot{x} = Ax + \phi(u_T(t))$, $x(0) = 0$, задовольняє умові $x(T) = 0$.

Тоді вірною є наступна теорема:

Теорема 1.7. [8] Для того щоб лінійна автономна система (1.14) була локально нуль-керованою, необхідно і достатньо, щоб виконувались такі умови:

1. на деякому інтервалі $I = [T^*, T^* + \alpha]$ виконувалась умова повернення,
2. для деякого $m \geq 0$ виконуються включення:

$$\begin{aligned} 0 &\in \text{int co}\{\phi(\Omega), A\phi(\Omega), \dots, A^m\phi(\Omega)\}, \\ 0 &\in \text{int co}\{\phi(\Omega), -A\phi(\Omega), \dots, (-1)^m A^m\phi(\Omega)\}. \end{aligned}$$

Тобто умова повертання узагальнює умову рівноваги, яка є її частинним випадком. Зазвичай перевірка умови повертання є найскладнішою задачею про доведенні нуль-керованості. Розглянемо лінійну керовану систему

$$\dot{x} = Ax + bu, x \in \mathbb{R}^n, u \in \Omega, \tag{1.15}$$

Як відомо, якщо керування $u(t)$ переводить точку x_0 в точку x_1 за час T то має виконуватись наступна рівність:

$$x_1 = e^{At} \left(x_0 + \int_0^T e^{-A\tau} \phi(u(\tau)) d\tau \right). \tag{1.16}$$

Підставляючи $x_0 = x_1 = 0$ отримуємо умову (1.17)

$$0 = \int_0^T e^{-At} b u(t) dt. \quad (1.17)$$

Таким чином, умова повертання для лінійної системи є еквівалентною задачі (1.17), в якій необхідно знайти інтервал $I = [T^*, T^* + \alpha]$ щоб для кожного $T \in I$ існував розв'язок $u_T(t)$.

Як приклад в статті [8] було розглянуто таку систему:

Приклад 1.8.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \quad \Omega = \{1, c\}, \quad 0 < c < 1. \quad (1.18)$$

Покажемо, що умова повертання виконується на відрізку $[2\pi - 2\gamma, 2\pi]$, де $\gamma = \text{arctg}((1 - c)/\sqrt{c(2 - c)})$. В цьому випадку умова (1.17) має вигляд

$$\begin{cases} \int_0^T u_T(\tau) \sin \tau d\tau = 0, \\ \int_0^T u_T(\tau) \cos \tau d\tau = 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Введемо T_1, T_2 , такі, що $0 < T_1 < \pi < T_2 \leq T < 2\pi$ і будемо шукати кусково-постійне керування

$$u_T(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T_1, \\ c, & T_1 < t < T_2, \\ 1, & T_2 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (1.20)$$

Умова (1.19) дає

$$\begin{cases} -(1-c)(\cos T_1 - \cos T_2) - \cos T + 1 = 0, \\ (1-c)(\sin T_1 - \sin T_2) + \sin T = 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

Тоді,

$$\begin{cases} -(1-c) \sin \frac{T_1 - T_2}{2} \sin \frac{T_1 + T_2}{2} = \sin^2 \frac{T}{2}, \\ (1-c) \sin \frac{T_1 - T_2}{2} \cos \frac{T_1 + T_2}{2} = -\sin \frac{T}{2} \cos \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (1.22)$$

Звідки

$$\tan \frac{T_1 + T_2}{2} = \tan \frac{T}{2}. \quad (1.23)$$

Оскільки $0 < T_1 < \pi < T_2 \leq T < 2\pi$, то з (1.23): $T = T_1 + T_2$. Тоді з (1.22) ми отримуємо

$$-(1-c) \sin \frac{T_1 - T_2}{2} = \sin \frac{T_1 + T_2}{2}. \quad (1.24)$$

Тоді

$$(-2+c) \tan \frac{T_1}{2} = c \tan \frac{T_2}{2}, \quad (1.25)$$

звідки

$$T_2 = 2\pi - 2 \arctan \left(\frac{2-c}{c} \tan \frac{T_1}{2} \right). \quad (1.26)$$

Для $T = 2\pi$ ми задаємо $T_1 = 0, T_2 = 2\pi$, тоді (1.19) виконується. Розглянемо тепер функцію

$$T = T(T_1) = T_1 + 2\pi - 2 \arctan \left(\frac{2-c}{c} \tan \frac{T_1}{2} \right), T_1 \in [0, \pi). \quad (1.27)$$

Диференціюючи по T_1 отримуємо

$$\frac{dT}{dT_1} = \frac{2c-2}{c} \frac{1 - \frac{2-c}{c} \tan^2 \frac{T_1}{2}}{1 + \left(\frac{2-c}{c}\right)^2 \tan^2 \frac{T_1}{2}} < 0, \text{ при } 0 < \tan \frac{T_1}{2} < \sqrt{\frac{c}{2-c}}. \quad (1.28)$$

Тоді неперервна функція (1.27) спадає на відрізку $\left[0, 2 \arctan \sqrt{\frac{c}{2-c}}\right]$ від

$2\pi - 2\gamma$ і тоді для будь-якого $T \in [2\pi - 2\gamma, 2\pi]$ існує керування виду (1.20) що повертає початок координат за час T .

Розділ 2

Побудова кусково-неперервного керування

2.1. Постановка задачі

В останньому прикладі було показано, що для системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \quad \Omega = \{1, c\}, \quad 0 < c < 1. \quad (2.1)$$

виконується умова повертання для довільного $0 < c < 1$, крім того керування можна записати у явному вигляді. В цій роботі ми вирішили розглянути умову повертання для більш загальної коливальної системи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \\ \dot{x}_3 = 2x_4, \\ \dot{x}_4 = -2x_3 + u, \\ \dots \\ \dot{x}_{2n-1} = n x_{2n}, \\ \dot{x}_{2n} = -n x_{2n-1} + u, \end{cases} \quad , \quad (2.2)$$

з обмеженнями на керування виду $u \in [c, 1]$ або $u \in \{c, 1\}$, $c > 0$. Ця система є системою незв'язних маятників, крім того вона також є системою, що моделює коливання струни. Подібні системи виникають і для зв'язних

маятників. Інтерес такої постановки полягає в тому, що ми намагаємось стабілізувати систему прикладаючи керування одного знаку, тобто діючи силою в одну і ту саму сторону, лише з різною величиною.

Матриці A і b мають наступний вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2t & \sin 2t & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin 2t & \cos 2t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \cos nt & \sin nt \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\sin nt & \cos nt \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Умова (1.17) запишеться у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T u(t) \sin t dt = 0, \\ \int_0^T u(t) \cos t dt = 0, \\ \dots, \\ \int_0^T u(t) \sin n t dt = 0, \\ \int_0^T u(t) \cos n t dt = 0, \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Таким чином ми отримуємо тригонометричну проблему моментів, розв'язок якої $u_T(t)$ має існувати для кожного T на деякому відрізку $I = [T^*, T^* + \alpha]$. Ця система може також бути записана в експоненціальній формі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T u(t)e^{it} dt = 0, \\ \int_0^T u(t)e^{2it} dt = 0, \\ \dots, \\ \int_0^T u(t)e^{nit} dt = 0. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Ми шукатимемо розв'язок даної системи серед кусково постійних функцій:

$$u(t) = \left\{ \begin{array}{l} c, \quad 0 \leq t \leq T_1, \\ 1, \quad T_1 \leq t \leq T_2, \\ c, \quad T_2 \leq t \leq T_3, \\ \dots \\ 1, \quad T_{k-1} \leq t \leq T_k, \\ c, \quad T_k \leq t \leq T. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Підставляючи в (2.5) отримуємо

$$\left\{ \begin{array}{l} c \sin T_1 + (\sin T_2 - \sin T_1) + \dots + c (\sin T - \sin T_k) = 0, \\ c \cos T_1 - c + (\cos T_2 - \cos T_1) + \dots + c (\cos T - \cos T_k) = 0, \\ \dots, \\ \frac{c}{n} \sin n T_1 + \frac{1}{n} (\sin n T_2 - \sin n T_1) + \dots + \frac{c}{n} (\sin n T - \sin n T_k) = 0, \\ \frac{c}{n} \cos n T_1 - \frac{c}{n} + \frac{1}{n} (\cos n T_2 - \cos n T_1) + \dots + \frac{c}{n} (\cos n T - \cos n T_k) = 0. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Таким чином система перетворюється на систему нелінійних рівнянь з не-

відомими змінними T_1, T_2, \dots, T_k, T .

2.2. Керування, що має $2n$ точок перемика- ння

Зауважимо, що при $T = 2\pi$ система (2.5) має розв'язок для довільного $u = \text{const}$, зокрема для $u = c$. Таким чином нам цікаво знайти розв'язок на трохи більшому, або меншому відрізку трохи змінюючи точки перемика-
ння. Для $c = \frac{1}{2}$ можна написати загальне явне рішення з $2n$ точками перемика-
ння. Для $T = 2\pi + a, a \geq 0$ воно має такий вигляд:

$$u_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 & \leq t \leq \frac{2\pi}{n+1}, \\ 1, & \frac{2\pi}{n+1} & \leq t \leq \frac{2\pi}{n+1} + a, \\ \frac{1}{2}, & \frac{2\pi}{n+1} + a & \leq t \leq 2\frac{2\pi}{n+1}, \\ 1, & 2\frac{2\pi}{n+1} & \leq t \leq 2\frac{2\pi}{n+1} + a, \\ \dots & & \\ 1, & n\frac{2\pi}{n+1} & \leq t \leq n\frac{2\pi}{n+1} + a, \\ \frac{1}{2}, & n\frac{2\pi}{n+1} + a & \leq t \leq 2\pi + a. \end{cases} \quad (2.9)$$

Доведення. Для керування (2.9) в позначеннях системи (2.8) маємо

$$T_1 = \frac{2\pi}{n+1}, T_2 = \frac{2\pi}{n+1} + a, \dots, T_{2n-1} = \frac{2\pi n}{n+1}, T_{2n} = \frac{2\pi n}{n+1} + a, T = 2\pi + a. \quad (2.10)$$

І необхідно показати, що

$$\begin{cases} \frac{c}{m} \sin mT_1 + \frac{1}{m}(\sin mT_2 - \sin nT_1) + \cdots + \frac{c}{m}(\sin mT - \sin nT_{2n}) = 0, \\ \frac{c}{m} \cos mT_1 - \frac{c}{m} + \frac{1}{m}(\cos mT_2 - \cos nT_1) + \cdots + \frac{c}{m}(\cos mT - \cos nT_{2n}) = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

для всіх $m \leq n + 1$. При $c = \frac{1}{2}$ і T_i з (2.10) отримуємо

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \left(\sin \left(\frac{2\pi mk}{n+1} + a \right) - \sin \left(\frac{2\pi mk}{n+1} \right) \right) + \sin(2\pi + a) = 0, \\ \sum_{k=1}^n \left(\cos \left(\frac{2\pi mk}{n+1} + a \right) - \cos \left(\frac{2\pi mk}{n+1} \right) \right) + \cos(2\pi + a) - 1 = 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

або

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \left(\sin \left(\frac{2\pi mk}{n+1} + a \right) - \sin \left(\frac{2\pi mk}{n+1} \right) \right) = 0, \\ \sum_{k=0}^n \left(\cos \left(\frac{2\pi mk}{n+1} + a \right) - \cos \left(\frac{2\pi mk}{n+1} \right) \right) = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

Це рівносильно

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \sin \left(\frac{a}{2} \right) \cos \left(\frac{2\pi mk}{n+1} + a \right) = 0, \\ \sum_{k=0}^n \sin \left(\frac{a}{2} \right) \sin \left(\frac{2\pi mk}{n+1} + a \right) = 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

або

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \cos \left(\frac{2\pi mk}{n+1} + a \right) = 0, \\ \sum_{k=0}^n \sin \left(\frac{2\pi mk}{n+1} + a \right) = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Запишемо це як

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \left(\cos\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi mk}{n+1}\right) + \sin\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi mk}{n+1}\right) \right) = 0, \\ \sum_{k=0}^n \left(\sin\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi mk}{n+1}\right) + \cos\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi mk}{n+1}\right) \right) = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Для цього достатньо показати, що

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{2\pi mk}{n+1}\right) = 0, \\ \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{2\pi mk}{n+1}\right) = 0, \end{cases} \quad (2.17)$$

або

$$\sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{2\pi mk}{n+1}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi mk}{n+1}\right) = 0, \quad (2.18)$$

звідки

$$\sum_{k=0}^n \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right) \right)^m = 0. \quad (2.19)$$

Ця рівність є вірною, оскільки $\cos\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right)$ є коренями x_{k+1} многочлена

$$x^{n+1} - 1 = 0, \quad (2.20)$$

а за теоремою Вієта:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n+1} = 0, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_nx_{n+1} = 0, \\ \dots \\ x_1x_2 \dots x_n + \dots + x_2x_3 \dots x_{n+1} = 0 \\ x_1x_2 \dots x_{n+1} = -1. \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 0, \\ \dots \\ x_1^n + x_2^n + \dots + x_{n+1}^n = 0, \\ x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \dots + x_{n+1}^{n+1} = n + 1. \end{cases} \quad (2.21)$$

Отже рівність є вірною при $m \leq n$. □

При $T = 2\pi$, $u(t) = \frac{1}{2}$. Довжина відрізків, на яких $u(t) = 1$, збільшується разом із збільшенням часу T . Графік керування для $n = 6$, $c = \frac{1}{2}$, $a = 0.1$ показано на рис. 2.1, окремі траєкторії показані на рис. 2.2. На рис. 2.3 і рис. 2.4 показані фазові траєкторії для двох перших і двох останніх координат.

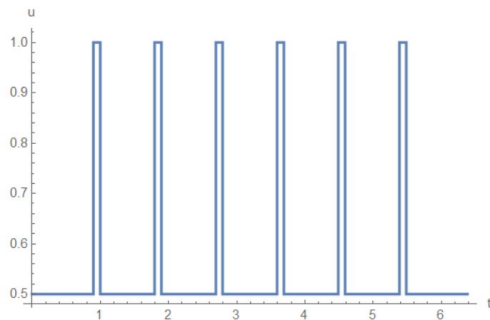


Рис. 2.1: Керування

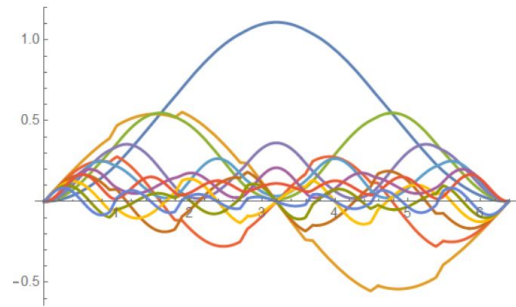


Рис. 2.2: Окремі траєкторії

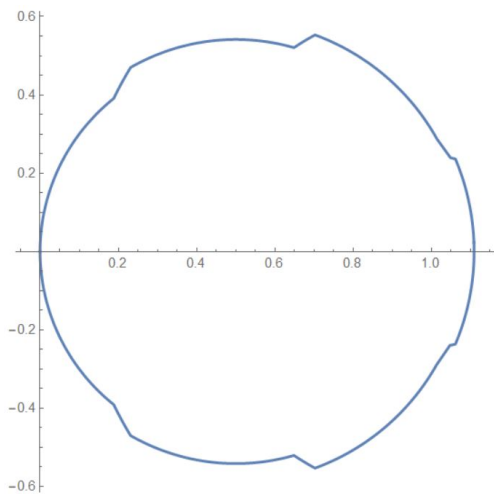


Рис. 2.3: Фазова траєкторія для x_1, x_2

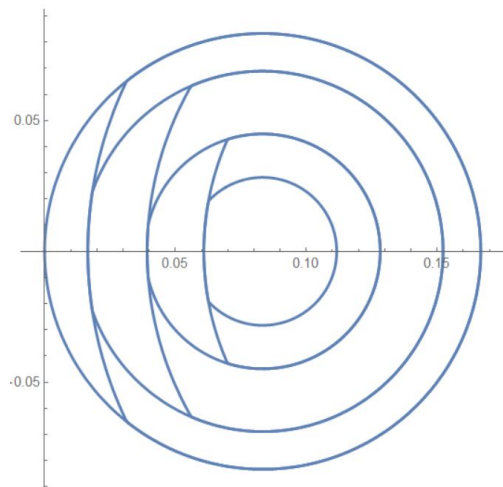


Рис. 2.4: Фазова траєкторія для x_{11}, x_{12}

Зауваження 2.1. Керування $u_n(t)$ буде розв'язком для будь-якої системи з власними числами $\lambda_j = \pm k_j i$, $k_j \leq n$, $k_j \in \mathbb{N}$.

Зауваження 2.2. Якщо $k_j \in \mathbb{Q}$, або $k_j \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, але існує k таке, що $\frac{k_j}{k} \in \mathbb{Q}$ для всіх $i = 1, \dots, n$, то після заміни змінних керування $u_n(t)$, при деякому n , також буде розв'язком для цієї системи.

Для $c \neq \frac{1}{2}$ важче отримати загальний розв'язок. Нам вдалося отримати його в явному вигляді для випадку $n = 1$ (є альтернативою для керування в прикладі 1.8):

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \arctan \left(\frac{\sin \left(\frac{a}{2} \right) \left(\sqrt{2 \left(\cos(a) + 2 \left(\frac{1}{c} \right)^2 - \frac{4}{c} + 1 \right)} - 2 \cos \left(\frac{a}{2} \right) \right)}{\cos \left(\frac{a}{2} \right) \sqrt{2 \left(\cos(a) + 2 \left(\frac{1}{c} \right)^2 - \frac{4}{c} + 1 \right)} - \cos(a) + 1} \right) + \pi, \\
 T_2 &= \arctan \left(\frac{\sin \left(\frac{a}{2} \right) \left(\sqrt{2 \left(\cos(a) + 2 \left(\frac{1}{c} \right)^2 - \frac{4}{c} + 1 \right)} + 2 \cos \left(\frac{a}{2} \right) \right)}{\cos \left(\frac{a}{2} \right) \sqrt{2 \left(\cos(a) + 2 \left(\frac{1}{c} \right)^2 - \frac{4}{c} + 1 \right)} + \cos(a) - 1} \right) + \pi.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

2.3. Керування з 2 точками перемикання

Із постановки задачі та отриманих результатів для побудови з $2n$ точок можна припустити певну симетрію в розташуванні точок перемикання. Дійсно, виявляється, що користуючись цим припущенням при $c = \frac{1}{2}$ ми можемо побудувати керування, що має лише дві точки перемикання. Для цього запишемо систему в експоненціальній формі (2.6):

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T u(t) e^{it} dt = 0, \\ \int_0^T u(t) e^{2it} dt = 0, \\ \dots, \\ \int_0^T u(t) e^{nit} dt = 0, \end{array} \right. \tag{2.23}$$

і розглянемо керування

$$u(t) = \begin{cases} c, & 0 \leq t \leq T_1, \\ 1, & T_1 \leq t \leq T_2, \\ c, & T_2 \leq T. \end{cases} \quad (2.24)$$

Покладемо $T - T_2 = T_1$. Тоді, виконуючи заміну $e^{T_1} = x, e^T = s$ ми отримуємо $e^{T_2} = \frac{s}{x}$, звідки випливає система рівнянь для змінних x і s :

$$\begin{cases} -c + (c-1)x + (1-c)\frac{s}{x} + cs = 0, \\ -c + (c-1)x^2 + (1-c)\frac{s^2}{x^2} + cs^2 = 0, \\ \dots \\ -c + (c-1)x^n + (1-c)\frac{s^n}{x^n} + cs^n = 0, \end{cases} \quad (2.25)$$

При $c = \frac{1}{2}$, $x = s$ – розв’язок. Поклавши деяке $s : |s| = 1$, отримуємо розв’язок системи. Але $x = e^{T_1}, s = e^T$, отже T_1 і T визначаються з точністю до 2π . Оберемо $T = 2\pi + T_1$ і отримаємо розв’язок нашої задачі. На рис. 2.5 і рис. 2.6 показані траєкторії для окремих координат і пар координат.

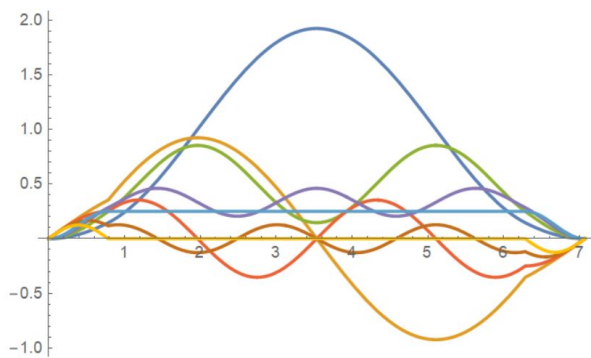


Рис. 2.5: Окремі траєкторії для $n = 4$

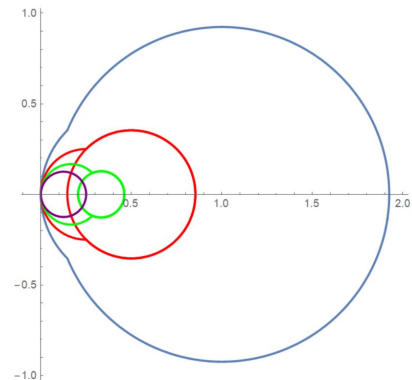


Рис. 2.6: Парні траєкторії для $n = 4$

Зауваження 2.3. Даний розв’язок $u(t)$ не залежить від розмірності за-

дачі і буде вірним для будь-якого n . Це означає що він буде розв'язком для будь-якої системи з цілими чисто уявними власними числами.

Зауваження 2.4. Можлива інша побудова розв'язку, для обмеження $u \in \{c, 1 - c, 1\}$, $0 < c < 1$, при якій точки перемикання залишають симетричними але несиметричним обирається керування:

$$u(t) = \begin{cases} c, & 0 \leq t \leq T_1, \\ 1, & T_1 \leq t \leq T_2, \\ 1 - c, & T_2 \leq T. \end{cases} \quad (2.26)$$

Оскільки система залежить лише від експоненти матриці A і вектора b , керування (2.23) або (2.24) вірне для будь-яких n , то, враховуючи Зауваження 2.2, справедлива наступна теорема:

Теорема 2.5. *Для системи*

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad c \leq u \leq 1, \quad c \leq \frac{1}{2}. \quad (2.27)$$

з матрицею A розміром $2n \times 2n$ і простими уявними власними значеннями $\pm i\nu_k$, $k = 1, \dots, n$ і такими, що $\text{rank}(b, Ab, \dots, A^{2n-1}b) = 2n$, умова повертання виконується, якщо $\nu_k \in \mathbb{R}$.

Зауваження 2.6. В обох випадках нам необхідно обмеження на керування у вигляді $u \in [c, 1]$, $c \leq 0.5$ або $u \in \{c, 1\}$. Питання для довільного c в загальному випадку залишається відкритим.

2.4. Випадок ірраціональних коефіцієнтів

Отримані вище результати вірні для випадку коли уявні частини власних чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матриці $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ є ірраціональними.

ми, але такими, що існує $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ така, що $\frac{\lambda_i}{\lambda} \in \mathbb{Q}$ для всіх $i = 1, \dots, n$. Ця умова гарантує нам, що існує деякий час $T > 0$, такий що

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T u(t) \sin \nu_1 t dt = 0, \\ \int_0^T u(t) \cos \nu_1 t dt = 0, \\ \dots, \\ \int_0^T u(t) \sin \nu_k t dt = 0, \\ \int_0^T u(t) \cos \nu_k t dt = 0, \end{array} \right. \quad (2.28)$$

вірно при $u = \text{const}$. В той же час такого часу T точно не існуватиме для взаємно ірраціональних чисел. Варто зауважити, що це не означає, що не можна побудувати керування, що повертає систему в точку 0, це означає, що воно не може бути постійним. Наприклад для випадку $n = 2$ був отриманий наступний загальний результат.

Твердження 2.7. Для системи

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad c \in \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}, \quad (2.29)$$

з власними значеннями матриці A $\lambda_{12} = \pm a_1 i$, $\lambda_{34} = \pm a_2 i$ при $a_1 < 2a_2$, $a_2 < 2a_1$ керування вигляду

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < t < \frac{\pi}{a_2}, \\ 1, & \frac{\pi}{a_2} < t < \frac{2m_1\pi}{a_1}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{2m_1\pi}{a_1} < t < \frac{2m_1\pi}{a_1} + \frac{\pi}{a_1} + \frac{\pi}{a_2}, \\ 1, & \frac{2m_1\pi}{a_1} + \frac{\pi}{a_1} + \frac{\pi}{a_2} < t < \frac{2m_1\pi}{a_1} + \frac{\pi}{a_2} + \frac{2m_2\pi}{a_2}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{2m_1\pi}{a_1} + \frac{\pi}{a_2} + \frac{2m_2\pi}{a_2} < t < \frac{2m_1\pi}{a_1} + \frac{\pi}{a_1} + \frac{\pi}{a_2} + \frac{2m_2\pi}{a_2}, \end{cases} \quad (2.30)$$

де числа $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ обираються такими, що $\frac{\pi}{a_2} < \frac{2m_1\pi}{a_1}, \frac{\pi}{a_1} < \frac{2m_2\pi}{a_2}$
 повертає точку 0 за час $T = \frac{2m_1\pi}{a_1} + \frac{\pi}{a_1} + \frac{\pi}{a_2} + \frac{2m_2\pi}{a_2}$.

На рис. 2.7 і рис. 2.8 показані траєкторії для координат і пар координат для системи (2.31):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \\ \dot{x}_3 = \sqrt{5}x_4, \\ \dot{x}_4 = -\sqrt{5}x_3 + u. \end{cases} \quad (2.31)$$

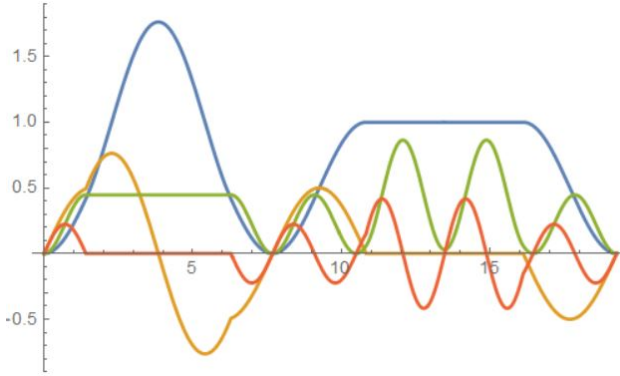


Рис. 2.7: Окремі траєкторії

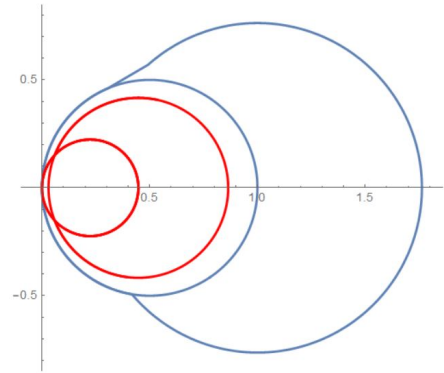


Рис. 2.8: Парні траєкторії

При обмеженнях на керування вигляду $u \in [c, d], c > 0$, можна використувати інший метод побудови керування, запропонований В. І. Коробовим [9], який ґрунтується на методі функції керованості і полягає в наступному:

Розглянемо лінійну керовану систему

$$\dot{x} = Ax + bu, x \in \mathbb{R}^n, u \in \Omega = [c, d], c > 0. \quad (2.32)$$

Введемо нове керування

$$v = \frac{1}{d-c}(2u - d - c), \quad (2.33)$$

тоді, $v \in [-1, 1]$. Позначимо як b_1, b_2 вектори

$$b_1 = \frac{d-c}{2}b, b_2 = \frac{d+c}{2}b, \quad (2.34)$$

тоді система (2.35) має вигляд

$$\dot{x} = Ax + b_1v + b_2, x \in \mathbb{R}^n, v \in \Omega_1 = [-1, 1]. \quad (2.35)$$

Маємо

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} \left(x_0 + \int_0^t e^{-A\tau} bu(\tau) d\tau \right) = \\ &= e^{At} \left(x_0 + \int_0^t e^{-A\tau} b_1 v(\tau) d\tau + \int_0^T e^{-A\tau} b_2 d\tau \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Нехай керування $v(t)$ переводить точку x_0 в точку 0 за деякий час $t = T$.

Потім

$$x_0 + \int_0^T e^{-A\tau} B_2 d\tau = - \int_0^T e^{-A\tau} B_1 v(\tau) d\tau. \quad (2.37)$$

Ця рівність означає, що керування $v(t)$ переносить точку

$$y_0 = x_0 + \int_0^T e^{-A\tau} b_2 d\tau \quad (2.38)$$

в точку 0 в силу системи

$$\dot{y} = Ay + b_1 v. \quad (2.39)$$

Оскільки точка 0 є внутрішньою для множини Ω_1 , цю задачу можна розв'язати методом функції керованості [2], якщо відомий час T . Функція керованості знаходиться з рівняння

$$2a_0\Theta = (N_1^{-1}y, y), \quad (2.40)$$

де

$$N_1(\Theta) = \int_0^\Theta \left(1 - \frac{t}{\Theta} \right) e^{-tA} b_1 b_1^* e^{-tA^*} dt. \quad (2.41)$$

Керування $v(t)$ задається формулою

$$v = -\frac{1}{2}B_1^*N_1^{-1}(\Theta)y \quad (2.42)$$

Коефіцієнт a_0 обирається таким чином, щоб

$$|v| \leq 1. \quad (2.43)$$

Для цього коефіцієнт a_0 обирається з нерівності

$$a_0 \leq \frac{1}{\sup_{\Theta} \Theta (N_1^{-1}b_1, b_1)}, \quad (2.44)$$

Знайдемо рівняння для часу T . Замінімо Θ на T і y на y_0 у рівнянні (2.41). Отримуємо рівняння:

$$2a_0T = \left(N_1^{-1}(T) \left(x_0 + \int_0^T e^{-A\tau} b_2 d\tau \right), \left(x_0 + \int_0^T e^{-A\tau} b_2 d\tau \right) \right), \quad (2.45)$$

$$\text{де } N_1(T) = \int_0^T \left(1 - \frac{t}{\Theta} \right) e^{-At} b_1 b_1^* e^{-A^*t} dt.$$

Це рівняння, в загальному випадку, має неєдиний розв'язок. Для кожного моменту T ми отримуємо керування і траєкторію $y(t)$. Після знаходження T знаходимо траєкторію $y(t)$ як розв'язок задачі Коші на інтервалі $[0, T]$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay - \frac{1}{2}b_1^*N_1^{-1}(\Theta y(t))y, \\ \dot{\Theta} &= -1, \\ y(0) &= y_0 = x_0 + \int_0^T e^{-A\tau} b_2 d\tau. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Після знаходження траєкторії $y(t)$ знаходимо вираз для траєкторії $x(t)$.

Зауваження 2.8. В даній побудові керування припускається, що систе-

ма є глобально керованою. Для коливальної системи таке припущення є вірним.

Приклад 2.9.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \\ \dot{x}_3 = \sqrt{2}x_4, \\ \dot{x}_4 = -\sqrt{2}x_3 + u. \end{cases}, \Omega = \left[\frac{2}{3}, 1 \right] \quad (2.47)$$

Тут

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{6} \\ 0 \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Час руху $T = 30.595$, траєкторії $y_i(t)$ зображені на (рис. 2.9):

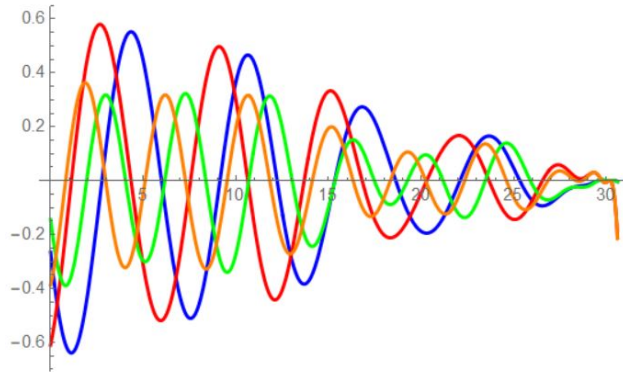


Рис. 2.9: Траєкторії $y_i(t)$

Розділ 3

Приклад програми

Для проведення розрахунків, побудови керування та знаходження траєкторій ми використовували систему *Mathematica*.

Лістинг 3.1: Побудова керування і траєкторій з $2n$ точками перемикання

```
Clear ["Global '*"]
n = 6;
eAb = {};
For[i = 0, i < n, i++; eAb = Append[eAb, Sin[i
t]];
eAb = Append[eAb, Cos[i t]];
Ti = Table[Symbol["T" <> ToString@i], {i, 2*n
}];
Tii = Append[Ti, T];
zeros = ConstantArray[0, 2*n];
ni = {Integrate[eAb*c, {t, 0, T1}]};
uu = {{c, 0 <= t <= T1}};
ini = {};
diff = {};
For[i = 1, i <= n,
ni = Append[ni, Integrate[eAb, {t, Tii[[2*i -
1]], Tii[[2*i]]}]];
ni = Append[ni, c*Integrate[eAb, {t, Tii[[2*i
```

```

    ]], Tii[[2*i + 1]]}]]];
ini = Append[ini, (2 \[Pi])/(n + 1)*i + 0.01];
ini = Append[ini, (2 \[Pi])/(n + 1)*i + 0.02];
uu = Append[uu, {1, Tii[[2*i - 1]] <= t <= Tii
    [[2*i]]}];
uu = Append[uu, {c, Tii[[2*i]] <= t <= Tii[[2*i
    + 1]]}];
diff = Append[diff, Simplify[Tii[[2*i]] - Tii
    [[2*i - 1]]]];
i++;
nn = Simplify[Total[ni]];
u[t_] = Piecewise[uu];
cond = Join[Partition[Ti, 1], Partition[ini,
    1], 2];
a = 0.1;
c = 1/2;
r1 = FindRoot[(nn /. {T -> 2 \[Pi] + a}) ==
    zeros, cond]
diff
diff /. r1
Plot[(u[t] /. r1) /. {T -> 2 \[Pi] + a}, {t, 0,
    2 \[Pi] + a},
PlotPoints -> 100, AxesLabel -> {"t", "u"},
PlotLabel -> "a_ = 0.1, n_ = 6"]
xi = Partition[Through[Table[Symbol["x" <
    ToString@i], {i, 2*n}][t]],
1];

```

```

A = ConstantArray[ConstantArray[0, 2*n], 2*n];
b = {};
For[i = 1, i <= n, A[[2 i - 1, 2 i]] = i; A[[2
    i, 2 i - 1]] = -i;
b = Append[b, {0}]; b = Append[b, {1}];
i++];
yi = NDSolveValue[{D[xi, t] ==
    A.xi + b*((u[t] /. r1) /. {T -> 2 \[Pi]
    + a}), (xi /. {t ->
    0}) == zeros}, Flatten[xi], {t,
    0, 2 \[Pi] + a}];
yi /. {t -> 0}
Plot[yi, {t, 0, 2 \[Pi] + a}, PlotRange -> All]

```

Лістинг 3.2: Побудова керування і траєкторій з 2 точками перемикання

```

Clear["Global`*"]
ur1 = -c + (c - 1) x + c*s/x + (1 - c) s;
ur2 = -c + (c - 1) x^2 + c*(s/x)^2 + (1 - c) s
    ^2;
ur3 = -c + (c - 1) x^3 + c*(s/x)^3 + (1 - c) s
    ^3;
phi = \[Pi]/4;
c = 1/2.;
Cos[phi] + I Sin[phi]
s1 = NSolve[{ur1 == 0} /. {x -> Cos[phi] + I
    Sin[phi]}, s][[1, 1]]
T1 = phi;
T = 2. \[Pi] + ArcSin[Im[s /. s1]];

```


$$T2 = T - T1;$$

$$\{T1, T2, T\}$$

$$u = \text{Piecewise}[\{\{c, 0 < t < T1\}, \{1, T1 < t < T2\}, \{1 - c, T2 < t < T\}\}];$$

$$N[\{\text{ur1}, \text{ur2}, \text{ur3}\} /. \{x \rightarrow \text{Cos}[\text{phi}] + I \text{Sin}[\text{phi}], s1\}]$$

$$\{x11, x22, x33, x44, x55, x66, x77, x88\} =$$

$$\text{NDSolveValue}[\{x1'[t] == x2[t], x2'[t] == -x1[t] + u,$$

$$x3'[t] == 2 x4[t], x4'[t] == -2 x3[t] + u, x5'[t] == 3 x6[t],$$

$$x6'[t] == -3 x5[t] + u, x7'[t] == 4 x8[t], x8'[t] == -4 x7[t] + u,$$

$$x1[0] == 0, x2[0] == 0, x3[0] == 0, x4[0] == 0, x5[0] == 0,$$

$$x6[0] == 0, x7[0] == 0, x8[0] == 0\}, \{x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7,$$

$$x8\}, \{t, 0, T\}];$$

$$N[\{x11[t], x22[t], x33[t], x44[t], x55[t], x66[t], x77[t],$$

$$x88[t]\} /. \{t \rightarrow T\}]$$

$$p1 = \text{ParametricPlot}[\{x11[t], x22[t]\}, \{t, 0, T\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Thick}]$$

$$p2 = \text{ParametricPlot}[\{x33[t], x44[t]\}, \{t, 0, T\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Thick}]$$

```

PlotStyle -> {Thick, Red}]
p3 = ParametricPlot[{x55[t], x66[t]}, {t, 0, T} ←
  },
PlotStyle -> {Thick, Green}]
p4 = ParametricPlot[{x77[t], x88[t]}, {t, 0, T} ←
  },
PlotStyle -> {Thick, Purple}]
Show[p1, p2, p3, p4]

xi = Partition[Through[Table[Symbol["x" ◊ ←
  ToString@i], {i, 2*n}][t]],
1];
A = ConstantArray[ConstantArray[0, 2*n], 2*n];
b = {};
For[i = 1, i <= n, A[[2 i - 1, 2 i]] = i; A[[2 ←
  i, 2 i - 1]] = -i;
b = Append[b, {0}]; b = Append[b, {1}];
i++];
yi = NDSolveValue[{D[xi, t] ==
  A.xi + b*((u[t] /. r1) /. {T -> 2 \[Pi] ←
  + a}), (xi /. {t ->
  0}) == zeros}, Flatten[xi], {t, ←
  0, 2 \[Pi] + a}];
yi /. {t -> 0}
Plot[yi, {t, 0, 2 \[Pi] + a}, PlotRange -> All]

```

Висновки

Дана робота була присвячена задачі нуль-керovanості для лінійних коливальних систем для випадку, коли точка нуль не є точкою рівноваги системи. В ході роботи було показано, що коливальна система $\dot{x}_{2k-1} = k x_{2k}$, $\dot{x}_{2k} = -k x_{2k-1} + u$, $k = 1, 2, \dots, n$ з обмеженнями виду $u \in \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}$ та $u \in [c, 1]$ може бути нуль керованою, були зроблені узагальнення для довільних лінійних систем з чисто уявними раціональними та ірраціональними взаємно простими власними значеннями. Для деяких систем вдалося знайти явний вигляд перемикання у вигляді кусково-постійної функції, пошук якого зводиться до розв'язання системи нелінійних рівнянь.

Для даної задачі може бути розглянуто велику кількість додаткових питань, зокрема існування керування для довільного обмеження $u \in \{c, 1\}$, загальний випадок ірраціональних та не взаємно простих коренів.

Список використаних джерел

- [1] Korobov, V. I., Marinich, A. P., Podol'skii, E. N. Controllability of linear autonomous systems with restrictions on the control. *Differ. Equ.* 11, 1465–1474 (1976)
- [2] Korobov, V. I. A general approach to the solution of the bounded control synthesis problem in a controllability problem, *Mat. Sb. (N.S.)*, 109(151):4(8) (1979), 582-606;
- [3] Korobov, V. I. A geometrical criterion of local controllability of dynamical systems in the presence of constraints on the control. *Differ. Equ* 15, 1136–1142 (1980).
- [4] Bianchini, R. M. Local Controllability, Rest States, and Cyclic Points, *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 21, pp. 714–720, 1983.
- [5] Conti, R. Return sets of a linear control process. *J. Optim. Theory Appl.* 41, 37–53 (1983).
- [6] Zverkin, A. M., Rozova, V. N. Reciprocal controls and their applications, *Differ. Uravn.*, 23:2 (1987), 228–236.
- [7] Korobov, V. I., Sklyar, G. M. Time-optimal control and the trigonometric moment problem, *Math. USSR-Izv.*, 35:1 (1990), 203–220.
- [8] Korobov, V. I. Geometric Criterion for Controllability under Arbitrary Constraints on the Control. *J Optim Theory Appl* 134, 161–176 (2007).
- [9] Korobov, V. I. On solving the controllability problem in the case of a positive constrained control. [Робота у підготовці]